ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NGUYỄN HỮU SƠN

MỘT SỐ ĐỊNH LÝ TỒN TẠI NGHIỆM TRONG QUY HOẠCH TOÀN PHƯƠNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN HỮU SƠN

MỘT SỐ ĐỊNH LÝ TỒN TẠI NGHIỆM TRONG QUY HOẠCH TOÀN PHƯƠNG

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TS. TRẦN VŨ THIỆU

Thái Nguyên - 2017

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn thạc sĩ chuyên ngành Toán ứng dụng với đề tài **"MỘT SỐ ĐỊNH LÍ TỒN TẠI NGHIỆM TRONG QUY HOẠCH TOÀN PHƯƠNG"** là kết quả của quá trình cố gắng không ngừng của bản thân và được sự giúp đỡ, động viên khích lệ của các thầy cô, bạn bè đồng nghiệp và người thân. Qua trang viết này tôi xin gửi lời cảm ơn tới những người đã giúp đỡ tôi trong thời gian học tập - nghiên cứu khoa học vừa qua.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy tôi GS.TS. Trần Vũ Thiệu, người đã trực tiếp hướng dẫn luận văn, đã tận tình chỉ bảo và hướng dẫn tôi tìm ra hướng nghiên cứu, tìm kiếm tài liệu, giải quyết vấn đề... nhờ đó tôi mới có thể hoàn thành luận văn cao học của mình. Từ tận đáy lòng, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất tới Thầy của tôi và tôi sẽ cố gắng hơn nữa để xứng đáng với công lao của Thầy.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, phòng Đào tạo và các thầy cô Khoa Toán – Tin trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, đã quan tâm và giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập tại trường.

Cuối cùng, tôi muốn bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới những người thân trong gia đình, đặc biệt là bố mẹ. Những người luôn động viên, chia sẽ mọi khó khăn cùng tôi trong suốt thời gian tôi theo học thạc sĩ tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 5 năm 2017

Tác giả luận văn

Nguyễn Hữu Sơn

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}$	tập số thực
$\mathbb{R}_+$	tập số thực không âm
$\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$	tập số thực mở rộng
H	không gian Hilbert
l^2	không gian các dãy số vô hạn
$\lVert x \rVert$	chuẩn của véc-tơ $x \in H$
$\lvert x \rvert$	giá trị tuyệt đối của $x \in \mathbb{R}$
$\{x^n\}$ hay $\{x_k\}$	dãy điểm trong H
$x_k \rightharpoonup x_0$	x_k hội tụ yếu (hội tụ theo tích vô hướng) tới x_0
$x_k \to x_0$	x_k hội tụ mạnh (hội tụ theo chuẩn) tới x_0
$\langle x, y \rangle$	tích vô hướng của hai véc-tơ $x, y \in H$
$[x, y]$	đoạn thẳng nối x và y
$x \leq y$	véc-tơ x nhỏ hơn hay bằng véc-tơ y ($x_i \leq y_i, \forall i = 1, ..., n$)
$x \geq y$	véc-tơ x lớn hơn hay bằng véc-tơ y ($x_i \geq y_i, \forall i = 1, ..., n$)
$conv\{x^1, ..., x^k\}$	bao lồi của các điểm $x^1, ..., x^k$
$d_C(x)$	khoảng cách từ điểm x tới tập C
$A + B$	tổng véc-tơ của hai tập A và B
$A - B$	hiệu véc-tơ của hai tập A và B
$A \cup B$	hợp của hai tập A và B
$A \cap B$	giao của hai tập A và B
$A \times B$	tích Đề các của hai tập A và B
$A \subset B$	A là tập con của B (mọi phần tử của A là phần tử của B)
$A \subseteq B$	A là tập con (có thể bằng) của B
0^+F	nón lùi xa của tập lồi F
$intS$	phần trong của $S(= int_H S)$

Mở đầu

Khi xét bài toán tối ưu $\min\{f(x) : x \in D\}$ ta thường đặt ra câu hỏi: Với những điều kiện nào của hàm hàm mục tiêu f và tập ràng buộc D thì bài toán có nghiệm tối ưu?

Trong quy hoạch tuyến tính ta đã biết sự kiện quen thuộc sau: một hàm tuyến tính bị chặn dưới trên tập lồi đa diện $D \neq \varnothing$ phải đạt cực tiểu trên D. Tính chất này được xem như *định lý cơ bản của quy hoạch tuyến tính.*

Frank - Wolfe [5] đã chỉ ra rằng nếu một hàm toàn phương (bất kể hàm đó lồi hay không) mà bị chặn dưới trên tập lồi đa diện $D \neq \varnothing$ thì hàm đó chắc chắn đạt cực tiểu trên D. Kết quả này được biết với tên gọi định lý Frank - Wolfe trong quy hoạch toàn phương và định lý này là một mở rộng của định lý cơ bản trong quy hoạch tuyến tính.

Tiếp đó nhiều tác giả khác đã mở rộng định lý Frank - Wolfe cho các lớp hàm mục tiêu khác và tập ràng buộc D có thể khác tập lồi đa diện.

Đề tài luận văn đề cập tới các định lý tồn tại nghiệm của các dạng khác nhau của bài toán quy hoạch toàn phương lồi hoặc không lồi và giới thiệu một kết quả tổng quát mới, nêu ra trong tài liệu tham khảo [4] về sự tồn tại nghiệm của bài toán quy hoạch toàn phương trong không gian Hilbert.

Để hiểu rõ các dạng bài toán quy hoạch toàn phương và các định lý tồn tại nghiệm sẽ trình bày, luận văn nhắc lại một số khái niệm cần thiết về tập lồi, hàm toàn phương, dạng thức Legendre, toán tử compact trong không gian Hilbert và các kết quả về sự tồn tại nghiệm của các bài toán quy hoạch toàn phương trong $\mathbb{R}^n$ Các kiến thức và kết quả cơ bản này chủ yếu được trình bày ở chương 1 của luận văn.

Nội dung tiếp theo của luận văn là giới thiệu kết quả nghiên cứu mới [4] về sự tồn tại nghiệm của bài toán quy hoạch toàn phương không lồi trong không gian Hilbert. Các định lý kiểu Frank - Wolfe thứ nhất và thứ hai và các hệ quả trong các trường hợp riêng. Những nội dung này sẽ được trình bày chi tiết ở chương 2 của luận văn.

Luận văn được viết dựa chủ yếu trên trên các tài liệu tham khảo [1] – [8] hiện có và gồm hai chương.

Chương 1 "Bài toán quy hoạch toàn phương trong $\mathbb{R}^n$" trình bày các kết quả về sự tồn tại nghiệm của bài toán quy hoạch tuyến tính (định lý cơ bản của quy hoạch tuyến tính), bài toán quy hoạch toàn phương với các ràng buộc tuyến tính (định lý Frank - Wolfe trong quy hoạch toàn phương), bài toán quy hoạch toàn phương với các ràng buộc toàn phương và trong quy hoạch đa thức lồi. Với mỗi lớp bài toán được xét đều có dẫn ra các ví dụ phân tích các giả thiết nêu trong các định lý tương ứng.

Chương 2 "Quy hoạch toàn phương trong không gian Hilbert" trình bày kết quả nghiên cứu mới ở [4] về sự tồn tại nghiệm của bài toán quy hoạch toàn phương không lồi với miền ràng buộc được xác định bởi các bất đẳng thức tuyến tính hay toàn phương lồi trong không gian Hilbert. Để thu được các kết quả này, các tác giả [4] đã sử dụng các tính chất của dạng thức Legendre hoặc các tính chất của toán tử compac với miền giá trị đóng. Các kết quả về sự tồn tại nghiệm được thiết lập không cần đến tính lồi của hàm mục tiêu hoặc tính compact của tập ràng buộc và chúng bao hàm như trường hợp riêng một số kết quả về sự tồn tại nghiệm của bài toán quy hoạch toàn phương trong không gian $\mathbb{R}^n$.

Chương 1

Bài toán quy hoạch toàn phương trong $\mathbb{R}^n$

Chương này trình bày các kết quả về sự tồn tại nghiệm của bài toán quy hoạch tuyến tính, bài toán quy hoạch toàn phương với các ràng buộc tuyến tính và bài toán quy hoạch toàn phương với các ràng buộc toàn phương. Nội dung của chương được tham khảo chủ yếu từ các tài liệu [1] − [3] và [5] − [7].

1.1 Định lý cơ bản của quy hoạch tuyến tính

Bài toán quy hoạch tuyến tính, ký hiệu (LP), có thể phát biểu dưới dạng:

$$\min\{f(x) = c^T x : Ax \leq b\}, \tag{LP}$$

trong đó $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (ma trận cấp $m \times n$), $b \in \mathbb{R}^m$, $c, x \in \mathbb{R}^n$ (x - véc tơ biến cần tìm).

Trong quy hoạch tuyến tính ta đã biết sự kiện quen thuộc với tên gọi "định lý cơ bản của quy hoạch tuyến tính". Nội dung định lý như sau.

Định lý 1.1.1 ([7], Định lý 9, tr. 312). *Một hàm tuyến tính $f(x) = c^T x$ bị chặn dưới trên một tập lồi đa diện $D \neq \varnothing$ phải đạt cực tiểu trên D.*

Chứng minh. Giả sử $D = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$. Theo định lý biểu diễn tập lồi đa diện, mọi $x \in D$ có biểu diễn

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u^i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j v^j + \sum_{k=1}^{r} \gamma_k w^k,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, \mu_j \geq 0, \lambda_i, \mu_j, \gamma_k \in \mathbb{R},$$

trong đó $Au^i \leq b, i = 1, \ldots, p, Av^j \leq 0, j = 1, \ldots, q, Aw^k = 0, k = 1, \ldots, r,$ $\langle w^i, w^j \rangle = 0, i \neq j$. (Nếu D không chứa đường thẳng nào, tức là $r = 0$, thì có thể lấy u^i là các đỉnh của D và v^j là các tia cực biên của nón lồi đa diện $K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$.)

Khi đó, hàm $f(x) = c^T x$ trên D được cho bởi

$$f(x) = c^T x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i c^T u^i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j c^T v^j + \sum_{k=1}^{r} \gamma_k c^T w^k. \tag{1.1}$$

Do $c^T x$ bị chặn dưới với mọi $\mu_j \geq 0$ và mọi $\gamma_k \in \mathbb{R}$, cho nên phải có $c^T v^j \geq 0$, $j = 1, \ldots, q$, $c^T w^k = 0$, $k = 1, \ldots, r$ và khi đó, rõ ràng (1.1) đạt cực tiểu với điều kiện $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, $\mu_j \geq 0$, $\gamma_k \in \mathbb{R}$.

Vì thế, bằng cách đặt

$$f^* = \min\{c^T u^i : i = 1, \ldots, p\}, I_1 = \{i : c^T u^i = f^*\}, I_2 = \{j : c^T v^j = 0\},$$

có thể thấy cực tiểu của (1.1) đạt được tại $\lambda_i^*, \mu_i^*, \gamma_k^*$ sao cho $\lambda_i^* = 0$ với $i \notin I_1, \lambda_i^* \geq 0, \sum_{i \in I_1} \lambda_i^* = 1, \mu_j^* \geq 0, j \in I_2, \mu_j^* = 0$ với $j \notin I_2$. Tập nghiệm của bài toán (LP) là

$$X^* = \Bigg\{x^* : x^* = \sum_{i \in I_1} \lambda_i u^i + \sum_{j \in I_2} \mu_j v^j + \sum_{k=1}^{r} \gamma_k w^k, \lambda_i \geq 0, \sum_{i \in I_1} \lambda_i = 1, \mu_j \geq 0, \gamma_k \in \mathbb{R}\Bigg\}.$$

$\square$

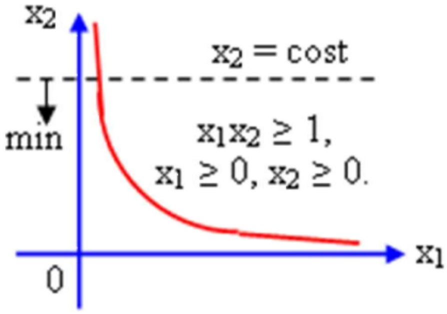
Liệu định lý này còn đúng nếu hàm f khác hàm tuyến tính hoặc tập ràng buộc D không còn là tập lồi đa diện?

Nhận xét 1.1.2 Định lý 1.1.1 nói chung không còn đúng nếu hoặc f khác hàm tuyến tính hoặc tập D không là tập lồi đa diện. Các Ví dụ 1.1.3 và 1.1.4 dưới đây minh hoạ cho nhận xét này.

Ví dụ 1.1.3 Bài toán với hàm mục tiêu tuyến tính và D khác tập lồi đa diện:

$$\min\{x_2 : x_1 x_2 \geq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

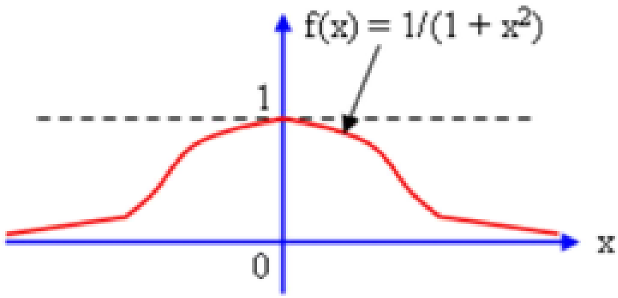
vô nghiệm, mặc dù $\theta := \inf\{x_2 : x_1x_2 \geq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\} = 0 > -\infty$ (xem Hình 1.1).



Hình 1.1: Ví dụ 1.1.3

Ví dụ 1.1.4 Bài toán tối ưu với hàm mục tiêu khác hàm tuyến tính có thể vô nghiệm ngay cả khi hàm mục tiêu có cận dưới hữu hạn. Chẳng hạn, bài toán cực tiểu: $\min\left\{\dfrac{1}{1+x^2} : x \in D \equiv \mathbb{R}\right\}$vô nghiệm, trong khi

$$\theta := \inf\left\{\frac{1}{1+x^2} : x \in \mathbb{R}\right\} \text{ (xem Hình 1.2).}$$



Hình 1.2: Ví dụ 1.1.4

1.2 Định lý Frank-Wolfe của quy hoạch toàn phương

Xét bài toán quy hoạch toàn phương, ký hiệu là (QP), có dạng

$$\min\{f(x) = \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx : Ax \leq b\}, \tag{QP}$$